

ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
c a m p i n a s

Resolve

ITA 2010
MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br

MATEMÁTICA

VEJA AS NOTAÇÕES ADOTADAS AO FINAL DA PROVA.

QUESTÃO 01

Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A , B e C quaisquer:

- I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- III. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Destas, é (são) falsa(s)

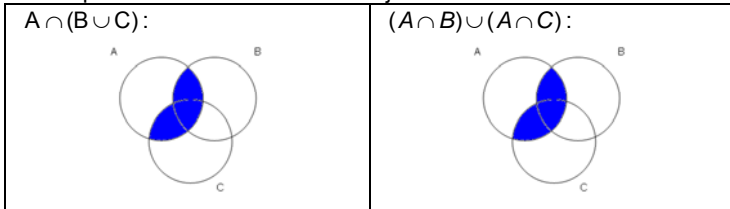
- a) apenas I.
- b) apenas II.
- c) apenas III.
- d) apenas I e III.
- e) nenhuma.

Resolução **Alternativa E**

Analizando cada uma das afirmações:

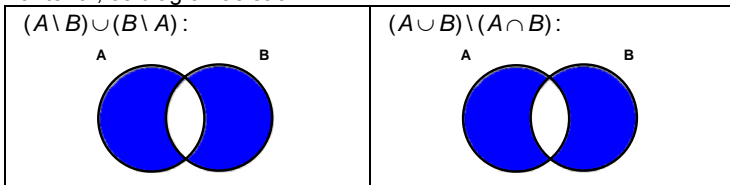
I) **Verdadeira.** De fato, negar a afirmação $x \in (A \cap B)$ significa afirmar que $x \notin (A \cap B)$, o que ocorre se e somente se $x \notin A$ ou $x \notin B$.

II) **Verdadeira.** De fato, construindo os diagramas de Venn correspondentes a cada um dos conjuntos temos:



Como os diagramas são iguais, segue que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

III) **Verdadeira.** Procedendo da mesma maneira que na afirmação anterior, os diagramas são:



Novamente, os diagramas são iguais, de modo que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Assim, todas as afirmações são verdadeiras.

QUESTÃO 02

Considere conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ e $C \subset (A \cup B)$. Se $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são os domínios das funções reais definidas por $\ln(x - \sqrt{\pi})$,

$\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ e $\sqrt{\frac{x - \pi}{5 - x}}$, respectivamente, pode-se afirmar que

- a) $C =]\sqrt{\pi}, 5[$.
- b) $C = [2, \pi]$.
- c) $C = [2, 5[$.
- d) $C = [\pi, 4]$.
- e) C não é intervalo.

Resolução **Alternativa C**

Admitindo-se que os domínios das funções reais do enunciado são os maiores possíveis, temos:

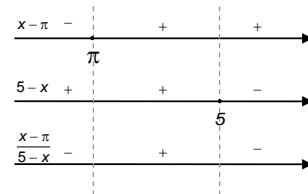
Como $C \subset (A \cup B)$, temos que $C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Assim, para

determinarmos C basta determinarmos os domínios de $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

e $\sqrt{\frac{x - \pi}{5 - x}}$, respectivamente.

A função $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ só está definida se $-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$. Assim, $A \cap C = [2, 4]$.

Considere a razão $\frac{x - \pi}{5 - x}$. Estudando o sinal dessa função, temos:



A função $\sqrt{\frac{x - \pi}{5 - x}}$ só está definida se $\frac{x - \pi}{5 - x} \geq 0$, ou seja, quando x está no intervalo $[\pi, 5[$. Assim, $B \cap C = [\pi, 5[$. Desse modo, temos então $C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = [2, 4] \cup [\pi, 5[\Rightarrow C = [2, 5[$

Apenas como verificação, note que a função $\ln(x - \sqrt{\pi})$ só está definida se $x - \sqrt{\pi} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{\pi}$. Assim, $A \cup B =]\sqrt{\pi}, +\infty[$. Observe que o intervalo $C = [2, 5[$ está contido no intervalo $]\sqrt{\pi}, +\infty[$, de modo que o exercício não apresenta inconsistência.

QUESTÃO 03

Se z é uma solução da equação em \mathbb{C} ,

$$z - \bar{z} + |z|^2 = -\left[(\sqrt{2} + i) \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{3} - i \frac{\sqrt{2} + 1}{3} \right) \right]^{12}$$

pode-se afirmar que

- a) $i(z - \bar{z}) < 0$.
- b) $i(z - \bar{z}) > 0$.
- c) $|z| \in [5, 6]$.
- d) $|z| \in [6, 7]$.
- e) $\left| z + \frac{1}{z} \right| > 8$.

Resolução **Alternativa E**

Desenvolvendo o segundo membro da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} -\left[(\sqrt{2} + i) \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{3} - i \frac{\sqrt{2} + 1}{3} \right) \right]^{12} &= -\left[\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2} + 1}{3} \right) + i \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{3} - \frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right) \right]^{12} \\ &= -[1 - i]^{12} = -(-2i)^6 = 64. \end{aligned}$$

Assim, a equação fica $z - \bar{z} + |z|^2 = 64$.

Chamando $z = a + bi$, temos:

$$z - \bar{z} + |z|^2 = 64 \Leftrightarrow a + bi - (a - bi) + a^2 + b^2 = 64 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 + 2bi = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 64 \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 0 \text{ e } a = \pm 8.$$

Logo, $z = \pm 8$. Assim, $\left| z + \frac{1}{z} \right| = \left| 8 + \frac{1}{8} \right| = \left| \frac{65}{8} \right| = 8,125 > 8$.

QUESTÃO 04

Os argumentos das soluções da equação em z

$$iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 - i = 0,$$

pertencem a

- a) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$.
- b) $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$.
- c) $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right]$.
- d) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right]$.
- e) $\left] 0, \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right[$.

Resolução **Alternativa C**

Fazendo $z = x + iy$, com x e y reais, temos:

$$iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 - i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i \cdot (x + iy) + 3 \cdot (x - iy) + (x + iy + x - iy)^2 - i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot i - y + 3x - 3y \cdot i + (2x)^2 - i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4x^2 + 3x - y) + i \cdot (x - 3y - 1) = 0$$

Como o número complexo do lado esquerdo deve ser nulo, temos então que sua parte real e sua parte imaginária são nulas. Assim:

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ 4x^2 + 3x - y = 0 \end{cases}$$

Fazendo $y = 4x^2 + 3x$ e substituindo na primeira equação do sistema, temos:

$$x - 3 \cdot (4x^2 + 3x) - 1 = 0 \Rightarrow 12x^2 + 8x + 1 = 0$$

Assim, temos $x = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{24} = \frac{-8 \pm 4}{24} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{6}$.

1) Se $x = -\frac{1}{2}$, temos $y = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$.

Assim, a primeira solução é $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, cujo

argumento principal é igual a $\frac{5\pi}{4}$. Em particular observe que esse complexo pertence ao terceiro quadrante.

2) Se $x = -\frac{1}{6}$, temos $y = 4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \Rightarrow y = -\frac{7}{18}$.

Assim, a segunda solução é $z = -\frac{1}{6} - \frac{7}{18} \cdot i = \frac{\sqrt{58}}{18} \operatorname{cis}\theta_2$. Observe que esse ponto também pertence ao terceiro quadrante, pois $\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{-7/18}{\sqrt{58}/18} < 0$ e $\operatorname{cos}\theta_2 = \frac{-1/6}{\sqrt{58}/18} < 0$.

Além disso, a tangente do ângulo θ_2 é maior que a do ângulo $\frac{5\pi}{4}$.

Isso fica evidente pois: $\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{-7/18}{-1/6} = \frac{7}{3} > 1 = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$

Assim, os argumentos das duas soluções da equação pertencem ao intervalo $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

QUESTÃO 05

Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_{50})$ de razão d . Se

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d \text{ e } \sum_{n=1}^{50} a_n = 4550, \text{ então } d - a_1 \text{ é igual a}$$

- a) 3. b) 6. c) 9. d) 11. e) 14.

Resolução **Alternativa D**

A soma dos k primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$\sum_{n=1}^k a_n = \frac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2}$$

Para $k = 10$, temos:

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \Leftrightarrow 10 + 25 \cdot d = 5 \cdot (a_1 + (a_1 + 9 \cdot d)) \Leftrightarrow a_1 + 2 \cdot d = 1$$

Para $k = 50$, temos:

$$\sum_{n=1}^{50} a_n = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} \Leftrightarrow 4550 = 25 \cdot (a_1 + (a_1 + 49 \cdot d)) \Leftrightarrow 2 \cdot a_1 + 49 \cdot d = 182$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2 \cdot d = 1 \\ 2 \cdot a_1 + 49 \cdot d = 182 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -7 \\ d = 4 \end{cases}$$

Assim: $d - a_1 = 4 - (-7) \Leftrightarrow \boxed{d - a_1 = 11}$

QUESTÃO 06

Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que f é par e g é ímpar. Das seguintes afirmações:

- I. $f \cdot g$ é ímpar,
II. $f \circ g$ é par,
III. $g \circ f$ é ímpar,

é (são) verdadeiras

- a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.
d) apenas I e II. e) todas.

Resolução

Alternativa D

Como f é par, temos $f(-x) = f(x)$, para $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como g é ímpar, temos $g(-x) = -g(x)$, para $\forall x \in \mathbb{R}$.

Assim, julgando cada afirmação:

(I) **Verdadeira.** Para $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -(f \cdot g)(x)$$

(II) **Verdadeira.** Para $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = f \circ g(x)$$

(III) **Falsa.** Tomemos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, de modo que f é par, e também $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x$, de modo que g é ímpar.

Temos $g \circ f(x) = g(x^2) = x^2$, que é uma função par, mas não ímpar.

Por exemplo: $\begin{cases} g \circ f(-1) = (-1)^2 = 1 \\ -g \circ f(1) = -1^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow g \circ f(-1) \neq -g \circ f(1)$

QUESTÃO 07

A equação em x

$$\operatorname{arctg}(e^x + 2) - \operatorname{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right) = \frac{\pi}{4}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

- a) admite infinitas soluções, todas positivas.
b) admite uma única solução, e esta é positiva.
c) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
d) admite apenas soluções negativas.
e) não admite solução.

Resolução

Alternativa B

Seja $\begin{cases} \alpha = \operatorname{arctg}(e^x + 2) \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = e^x + 2 \\ \beta = \operatorname{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}(\beta) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \end{cases}$

Reescrevendo a equação inicial utilizando as substituições acima, temos: $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

Aplicando tangente em ambos os lados:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)} = 1 \tag{I}$$

Substituindo os valores de $\operatorname{tg}(\alpha)$ e $\operatorname{tg}(\beta)$ em (I):

$$\frac{(e^x + 2) - \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)}{1 + (e^x + 2) \cdot \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)} = 1 \Rightarrow e^{3x} + 2 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^x - 3 = 0 \tag{II}$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^x$ e substituindo em (II):

$$y^3 + 2 \cdot y^2 - 2 \cdot y - 3 = 0$$

Por inspeção $y = -1$ é uma raiz da equação acima, aplicando Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ & & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

A equação resultante é: $y^2 + y - 3 = 0$

Resolvendo por Bhaskara: $y = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ ou $y = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$.

Desta forma, as soluções da equação polinomial em y são

$$-1, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}.$$

No entanto, como $y = e^x$, temos que $y > 0$, e, portanto, a única solução para o problema do enunciado é:

$$y = e^x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right) > 0, \text{ pois } \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} > 1.$$

Como só existe uma solução e ela é positiva, a alternativa correta é a **B**.

QUESTÃO 08

Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, $a \in \mathbb{R}$, admite a raiz $-i$. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p :

- I. Quatro raízes são imaginárias puras
- II. Uma das raízes tem multiplicidade dois
- III. Apenas uma das raízes é real.

Destas, é (são) verdadeira (s) apenas

- a) I b) II c) III d) I e III e) II e III

Resolução **Alternativa C**

Do enunciado temos que $-i$ é raiz do polinômio $p(x)$. Como todos os seus coeficientes de $p(x)$ são reais, temos pelo teorema das raízes complexas que i também é uma raiz do polinômio. Assim:

$$p(i) = 0 \Leftrightarrow i^5 - a \cdot i^3 + a \cdot i^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -(a+1) + (a+1) \cdot i = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Desse modo, temos $p(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$. Fatorando $p(x)$:

$$p(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1 = x^3 \cdot (x^2 + 1) - 1 \cdot (x^2 + 1) \Rightarrow p(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^3 - 1)$$

Observe que $p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ ou $x^3 - 1 = 0$.

As raízes de $x^2 + 1 = 0$ são justamente i e $-i$, que já foram determinadas. Para resolver a equação $x^3 - 1 = 0$, podemos utilizar a fatoração $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ para $a = x$ e $b = 1$:

$$x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) = 0$$

Assim, $x - 1 = 0$ ou $x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Analisando agora cada uma das afirmações temos:

- I) Falsa.** Apenas i e $-i$ são imaginárias puras.
- II) Falsa.** Todas as raízes têm multiplicidade 1.
- III) Verdadeira.** Apenas $x = 1$ é uma raiz real.

QUESTÃO 09

Um polinômio real $p(x) = \sum_{n=0}^5 a_n x^n$, com $a_5 = 4$, tem três raízes reais distintas, a , b e c , que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que $p(1)$ é igual a

- a) -4. b) -2. c) 2. d) 4. e) 6.

Resolução **Alternativa A**

Resolvendo o sistema nas variáveis a , b e c , temos:

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{3}{2} \\ c = -1 \end{cases}$$

Assim, a maior raiz é $a = 2$, que será a raiz simples, enquanto $b = \frac{3}{2}$ e $c = -1$ serão ambas raízes de multiplicidade 2. Pela fatoração do polinômio de grau 5 em termos de suas raízes, temos:

$$p(x) = a_5 \cdot (x - a) \cdot (x - b)^2 \cdot (x - c)^2 = 4 \cdot (x - 2) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot (x - (-1))^2$$

Portanto: $p(1) = 4 \cdot (1 - 2) \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot (1 + 1)^2 \Leftrightarrow \boxed{p(1) = -4}$

QUESTÃO 10

Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + ia_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, 15$. Das afirmações:

- I. $p(-1) \notin \mathbb{R}$,
- II. $|p(x)| \leq 4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$, $\forall x \in [-1, 1]$,
- III. $a_8 = a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

- a) I. b) II. c) III. d) I e II. e) II e III.

Resolução

Alternativa E

A partir da relação de recorrência que define os coeficientes do polinômio, temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_1 &= 1 + i \cdot a_0 = 1 - i \\ a_2 &= 1 + i \cdot a_1 = 1 + i \cdot (1 - i) = 2 + i \\ a_3 &= 1 + i \cdot a_2 = 1 + i \cdot (2 + i) = 2 \cdot i \\ a_4 &= 1 + i \cdot a_3 = 1 + i \cdot (2i) = -1 = a_0 \end{aligned}$$

Assim, a partir desse coeficiente temos uma repetição que nos leva a:

$$a_0 = a_4 = a_8 = a_{12}; a_1 = a_5 = a_9 = a_{13}; a_2 = a_6 = a_{10} = a_{14}; a_3 = a_7 = a_{11} = a_{15}$$

Assim,

$$p(x) = a_0 \cdot (1 + x^4 + x^8 + x^{12}) + a_1 \cdot (x + x^5 + x^9 + x^{13}) + a_2 \cdot (x^2 + x^6 + x^{10} + x^{14}) + a_3 \cdot (x^3 + x^7 + x^{11} + x^{15})$$

Logo, temos:

I) FALSA:

$$\begin{aligned} p(-1) &= a_0 \cdot (4) + a_1 \cdot (-4) + a_2 \cdot (4) + a_3 \cdot (-4) = \\ &= 4 \cdot [(-1) + (-1 + i) + (2 + i) + (-2i)] = 0 \end{aligned}$$

que é um número real.

II) VERDADEIRA:

$$p(x) = a_0 \cdot (1 + x^4 + x^8 + x^{12}) + a_1 \cdot (x + x^5 + x^9 + x^{13}) + a_2 \cdot (x^2 + x^6 + x^{10} + x^{14}) + a_3 \cdot (x^3 + x^7 + x^{11} + x^{15})$$

$$|p(x)| = |a_0 \cdot (1 + x^4 + x^8 + x^{12}) + a_1 \cdot (x + x^5 + x^9 + x^{13}) + a_2 \cdot (x^2 + x^6 + x^{10} + x^{14}) + a_3 \cdot (x^3 + x^7 + x^{11} + x^{15})|$$

$$|p(x)| \leq |a_0 \cdot (1 + x^4 + x^8 + x^{12})| + |a_1 \cdot (x + x^5 + x^9 + x^{13})| + |a_2 \cdot (x^2 + x^6 + x^{10} + x^{14})| + |a_3 \cdot (x^3 + x^7 + x^{11} + x^{15})|$$

Como x está entre -1 e 1 , cada soma de expoentes é menor ou igual do que 4.

$$\begin{cases} |1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \leq 4 \\ |x + x^5 + x^9 + x^{13}| \leq 4 \\ |x^2 + x^6 + x^{10} + x^{14}| \leq 4 \\ |x^3 + x^7 + x^{11} + x^{15}| \leq 4 \end{cases} \Rightarrow |p(x)| \leq 4 \cdot (|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3|) \text{ Sabendo que:}$$

Como $|a_0| = 1$, $|a_1| = \sqrt{2}$, $|a_2| = \sqrt{5}$ e $|a_3| = 2$, temos:

$$|p(x)| \leq 4 \cdot (1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + 2) = 4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$$

III) VERDADEIRA: Pela repetição da relação de recorrência, temos que $a_4 = a_8$.

QUESTÃO 11

A expressão $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$ é igual a

- a) $2630\sqrt{5}$. b) $2690\sqrt{5}$. c) $2712\sqrt{5}$.
- d) $1584\sqrt{15}$. e) $1604\sqrt{15}$.

Resolução **Alternativa B**

Temos que:

$$\begin{cases} (2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (2\sqrt{3})^{5-k} (\sqrt{5})^k \\ (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (2\sqrt{3})^{5-k} (-\sqrt{5})^k \end{cases}$$

Observe que ao subtrairmos a primeira identidade da segunda, membro a membro, os termos em $k = 0$, $k = 2$ e $k = 4$, sendo iguais nas duas, vão se cancelar, sobrando os termos em $k = 1$, $k = 3$ e $k = 5$, que tendo sinais opostos, aparecerão em dobro:

$$\begin{aligned} &(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5 = \\ &2 \cdot \left[\binom{5}{1} (2\sqrt{3})^{5-1} (\sqrt{5})^1 + \binom{5}{3} (2\sqrt{3})^{5-3} (\sqrt{5})^3 + \binom{5}{5} (2\sqrt{3})^{5-5} (\sqrt{5})^5 \right] = \\ &2 \cdot [5 \cdot 144 \cdot \sqrt{5} + 10 \cdot 12 \cdot 5\sqrt{5} + 1 \cdot 1 \cdot 25\sqrt{5}] = \boxed{2690\sqrt{5}} \end{aligned}$$

QUESTÃO 12

Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente de modo que, para cada um dos refletores, seja de $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ser aceso. Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente, é igual a

- a) $\frac{16}{27}$. b) $\frac{49}{81}$. c) $\frac{151}{243}$. d) $\frac{479}{729}$. e) $\frac{2^4 + 2^5}{3^4 + 3^5}$.

Resolução

Alternativa A

Se a probabilidade de um refletor estar aceso é $\frac{2}{3}$, a probabilidade de um refletor estar apagado é dada por $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Temos dois casos para analisar: ou apenas 4 refletores serão acesos ou apenas 5 refletores serão acesos.

Se apenas 4 refletores forem acesos, temos então que escolher 4 dentre os 6 refletores para acender. Assim, aplicando a lei binomial da probabilidade, temos:

$$p(4 \text{ refletores}) = \binom{6}{4} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^4}_{\text{refletores acesos}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{6-4}}_{\text{refletores apagados}} \Rightarrow p(4 \text{ refletores}) = 15 \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow p(4 \text{ refletores}) = \frac{80}{243}$$

Se apenas 5 refletores forem acesos, temos então que escolher 5 dentre os 6 refletores para acender. Assim, aplicando novamente a lei binomial da probabilidade, temos:

$$p(5 \text{ refletores}) = \binom{6}{5} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^5}_{\text{refletores acesos}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{6-5}}_{\text{refletores apagados}} \Rightarrow p(5 \text{ refletores}) = 6 \cdot \frac{32}{243} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow p(5 \text{ refletores}) = \frac{64}{243}$$

Como os casos "4 refletores" ou "5 refletores" são mutuamente exclusivos, temos que a probabilidade de termos apenas 4 ou apenas

5 refletores acesos é dada por $\frac{80}{243} + \frac{64}{243} = \frac{144}{243} = \frac{16}{27}$.

QUESTÃO 13

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

em que $a_4 = 10$, $\det A = -1000$ e a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $d > 0$. Pode-se afirmar

que $\frac{a_1}{d}$ é igual a

- a) -4. b) -3. c) -2. d) -1. e) 1.

Resolução

Alternativa D

Sendo $a_4 = 10$, pelo termo geral da progressão aritmética, temos:

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + 3 \cdot d \\ a_6 = a_4 + 2 \cdot d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - 3 \cdot d \\ a_6 = 10 + 2 \cdot d \end{cases}$$

Sendo A uma matriz triangular superior, seu determinante é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal:

$$\det A = a_1 \cdot a_4 \cdot a_6 \Rightarrow -1000 = (10 - 3 \cdot d) \cdot 10 \cdot (10 + 2 \cdot d) \Leftrightarrow$$

$$3d^2 + 5d - 100 = 0 \Leftrightarrow d = 5 \text{ ou } d = -\frac{20}{3}$$

Como $d > 0$, ficamos com $d = 5$.

Portanto: $a_1 = 10 - 3 \cdot d = 10 - 3 \cdot 5 = -5$

Assim:

$$\frac{a_1}{d} = \frac{-5}{5} \Leftrightarrow \frac{a_1}{d} = -1$$

QUESTÃO 14

Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 225, respectivamente. Então $\det(A^{-1})$ e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

- a) $\frac{1}{72}$ e 12.
b) $-\frac{1}{72}$ e -12.
c) $-\frac{1}{72}$ e 12.
d) $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$.
e) $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$.

Resolução

Alternativa C

Trabalhando com as duas progressões geométricas, e sabendo que a

soma de uma PG de razão q e n termos é $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$:

i) (x_1, x_2, x_3, x_4) é uma PG de razão 3 e soma 80. Logo:

$$80 = \frac{x_1 \cdot (3^4 - 1)}{3 - 1} = x_1 \cdot 40 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

Assim, a PG é: (2, 6, 18, 54).

ii) (y_1, y_2, y_3, y_4) é uma PG de razão 4 e soma 225. Logo:

$$225 = \frac{y_1 \cdot (4^4 - 1)}{4 - 1} = y_1 \cdot 85 \Leftrightarrow y_1 = 3$$

Assim, a PG é: (3, 12, 48, 192).

Portanto, a matriz A é:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante de A por Laplace na 4ª linha, temos:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 18 & 54 \\ 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -72.$$

Portanto, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = -\frac{1}{72}$.

Podemos obter um elemento qualquer da inversa de A , sabendo que a esta é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A_{adj}$, onde A_{adj} é a matriz adjunta de

A (transposta da matriz cofatora). Logo, $(A^{-1})_{23} = \frac{C_{32}}{\det A}$, onde C_{32} é o cofator da linha 3 e coluna 2 da matriz A . Assim, temos:

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 18 & 54 \\ 3 & 48 & 192 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(3456 - 2592) = -864$$

E, finalmente:

$$(A^{-1})_{23} = \frac{C_{32}}{\det A} = \frac{-864}{-72} \Rightarrow (A^{-1})_{23} = 12$$

QUESTÃO 15

O valor da soma $\sum_{n=1}^6 \sin\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

- a) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right]$. b) $\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$.
c) $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$. d) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$.
e) $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha$.

Resolução

Alternativa A

Lembrando a transformação de soma em produto:

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cdot [-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

Fazendo $x = \frac{2\alpha}{3^n}$ e $y = \frac{\alpha}{3^n}$, vem que:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \left[-\cos\left(\frac{2\alpha}{3^n} + \frac{\alpha}{3^n}\right) + \cos\left(\frac{2\alpha}{3^n} - \frac{\alpha}{3^n}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[-\cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)\right] \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\sum_{n=1}^6 \sin\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^6 \frac{1}{2} \cdot \left[-\cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)\right]$$

Observe que se trata de uma soma telescópica, de modo que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^6 \sin\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \left[-\cos\left(\frac{\alpha}{3^{1-1}}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{3^6}\right)\right] \Leftrightarrow \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right] \end{aligned}$$

QUESTÃO 16

Se os números reais α e β , com $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$, $0 \leq \alpha \leq \beta$, maximizam a soma $\sin\alpha + \sin\beta$, então α é igual a

- a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. b) $\frac{2\pi}{3}$. c) $\frac{3\pi}{5}$. d) $\frac{5\pi}{8}$. e) $\frac{7\pi}{12}$.

Resolução

Alternativa B

Aplicando a transformação da soma em produto, temos:

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\ &= 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

Para que tenhamos soma máxima, devemos impor que o cosseno seja máximo, ou seja, fazemos:

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1 \Rightarrow \alpha - \beta = 2 \cdot k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Assim:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{4\pi}{3} \\ \alpha - \beta = 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{3} - k \cdot \pi \\ \beta = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi \end{cases}$$

Como $0 \leq \alpha \leq \beta$, temos $0 \leq \frac{2\pi}{3} - k \cdot \pi \leq \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi \Rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ k \leq \frac{2}{3} \end{cases}$ e assim,

sabendo que $k \in \mathbb{Z}$ chega-se a $k=0$ e $\alpha = \beta = \frac{2\pi}{3}$

QUESTÃO 17

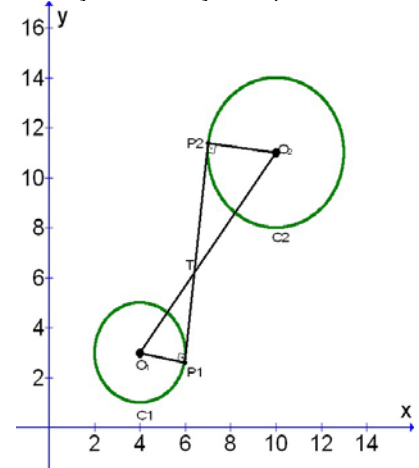
Considere as circunferências $C_1: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ e $C_2: (x-10)^2 + (y-11)^2 = 9$. Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2 , isto é, r tangencia C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2 . Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede

- a) $5\sqrt{3}$. b) $4\sqrt{5}$. c) $3\sqrt{6}$. d) $\frac{25}{3}$. e) 9.

Resolução

Alternativa A

Observe a representação da situação no plano cartesiano:



Calculando a distância dos centros das circunferências (4,3) e (10,11), temos:

$$O_1O_2 = \sqrt{(10-4)^2 + (11-3)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Considerando a figura acima, temos que $\triangle O_1P_1T$ é semelhante à $\triangle O_2P_2T$. Como o raio das circunferências C_1 e C_2 são, respectivamente, 2 e 3, temos:

$$\frac{O_1P_1}{O_1T} = \frac{O_2P_2}{O_2T} \Rightarrow \frac{2}{O_1T} = \frac{3}{10 - O_1T} \Rightarrow O_1T = 4$$

Consequentemente, $O_2T = 10 - 4 = 6$

Aplicando o teorema de Pitágoras em $\triangle O_1P_1T$, temos:

$$O_1T^2 = P_1T^2 + O_1P_1^2 \Rightarrow P_1T^2 = 16 - 4 \Rightarrow P_1T = 2\sqrt{3}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras em $\triangle O_2P_2T$, temos:

$$O_2T^2 = P_2T^2 + O_2P_2^2 \Rightarrow P_2T^2 = 36 - 9 \Rightarrow P_2T = 3\sqrt{3}$$

A distância desejada é: $P_1T + P_2T = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

QUESTÃO 18

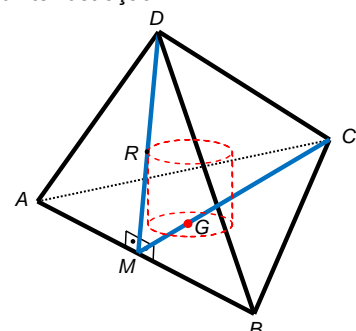
Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm, o volume do cilindro, em cm^3 , é igual a

- a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$. b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. c) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$. d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$. e) $\frac{\pi}{3}$.

Resolução

Alternativa D

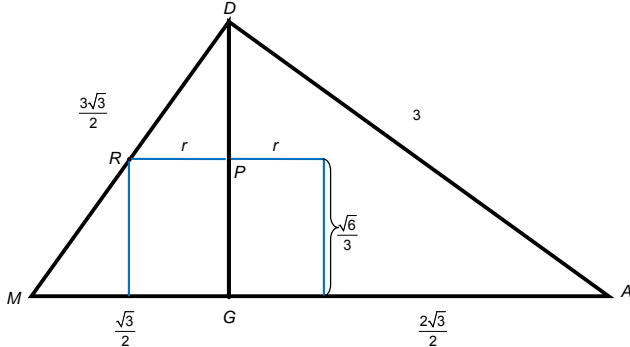
Considere a seguinte ilustração:



Seja H a altura do tetraedro e r o raio do cilindro. Dado que suas arestas medem 3 cm, temos que sua altura é dada por:

$$H = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3} \Rightarrow H = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{3} \Rightarrow H = \sqrt{6} \text{ cm}$$

Como o cilindro está inscrito no tetraedro, a altura de cada face lateral do tetraedro é tangente à base superior do cilindro. Fazendo então um corte transversal no tetraedro contendo a altura da base e um desses pontos de tangência, podemos montar a seguinte figura, onde G é o baricentro da face inferior do tetraedro:



Observe que o raio da base do cilindro $PR = r$ e a altura do tetraedro é $DG = \sqrt{6}$. Além disso, o ponto G é o baricentro da base, de modo que:

$$MG = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MG = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

Pela figura, temos:

$$DP = DG - PG = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow DP = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

Os triângulos DGM e DPR são semelhantes. Assim:

$$\frac{DG}{DP} = \frac{GM}{PR} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{r} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Assim, o volume do cilindro é dado por

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi\sqrt{6}}{9} \text{ cm}^3$$

QUESTÃO 19

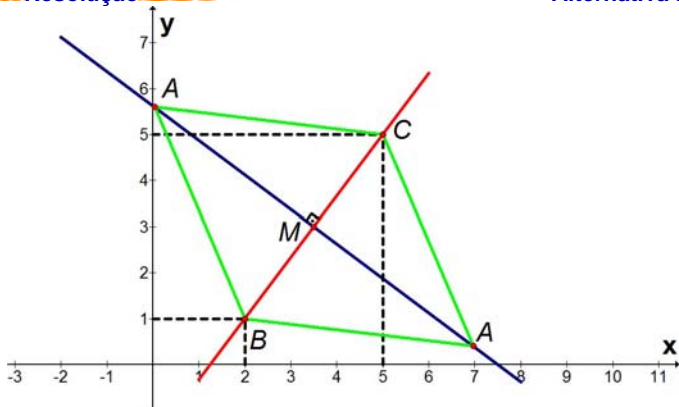
Um triângulo equilátero tem os vértices nos pontos A , B e C do plano xOy , sendo $B = (2,1)$ e $C = (5,5)$. Das seguintes afirmações:

- I. A se encontra sobre a reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$,
- II. A está na intersecção da reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ com a circunferência $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$,
- III. A pertence às circunferências $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ e $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{75}{4}$,

é (são) verdadeira(s) apenas

- a) I. b) II. c) III. d) I e II. e) II e III.

Resolução



Observe a ilustração acima. Por ela podemos ver que há duas possibilidades onde o ponto A pode estar situado, para que o triângulo ABC seja equilátero. No triângulo ABC , sabemos que a reta suporte da altura relativa à base \overline{BC} , passa pelo ponto médio de \overline{BC} (ponto M na figura) já que o triângulo é equilátero, e é perpendicular a este mesmo segmento. Sendo assim, calculemos a equação desta reta, \overline{AM} .

Sendo o coeficiente angular de \overline{BC} $m_{\overline{BC}} = \frac{5-1}{5-2} = \frac{4}{3}$, o valor do coeficiente angular de \overline{AM} é $m_{\overline{AM}} = -\frac{1}{m_{\overline{BC}}} = -\frac{3}{4}$.

Como ponto médio de \overline{BC} , M é dado por $M = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 3\right)$,

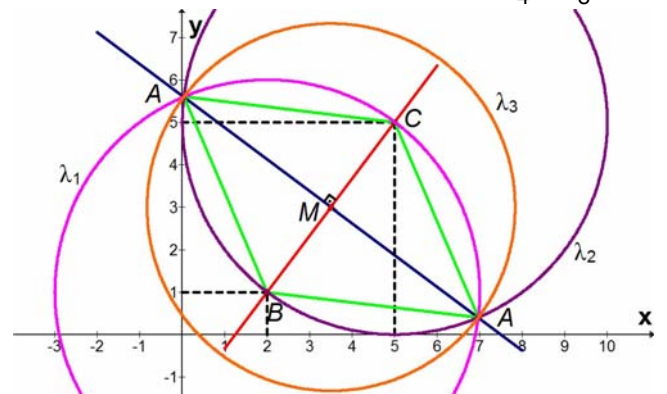
de modo que a equação da reta \overline{AM} é dada por:

$$y - y_M = m_{\overline{AM}}(x - x_M) \Leftrightarrow y - 3 = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$$

Agora analisemos as afirmações dadas.

(I) **Falsa**. As duas possibilidades para o ponto A se encontram sobre a reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$, como demonstramos acima.

(II) **Verdadeira**. A equação da circunferência dada (λ_1 na figura abaixo) se refere a uma circunferência que tem centro em $B = (2,1)$ e raio igual a 5. Como os lados do triângulo equilátero ABC são iguais a $BC = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = 5$, podemos dizer que o ponto A está situado sobre essa circunferência. Além disso, como já demonstrado acima, ele também pertence à reta de equação $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$.



(III) **Verdadeira**. A primeira equação de circunferência dada neste item (λ_2 na figura) se refere a uma circunferência que tem centro em $C = (5,5)$ e raio 5. Como já vimos que o lado do triângulo mede 5, podemos afirmar que o ponto A está situado sobre esta circunferência. A segunda equação de circunferência dada (λ_3 na figura) se refere a uma circunferência que tem centro em $M = \left(\frac{7}{2}, 3\right)$ e raio $\sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, que é exatamente a medida da altura do triângulo equilátero ABC . Sendo assim o ponto A pertence a essa circunferência também.

QUESTÃO 20

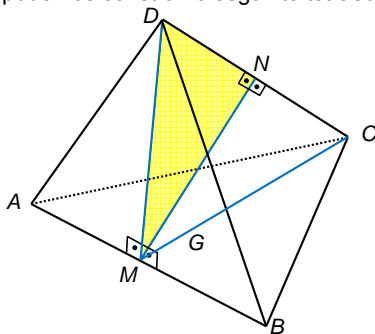
Sejam A , B , C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento \overline{AB} e N é o ponto médio do segmento \overline{CD} , então a área do triângulo MND , em cm^2 , é igual a

- a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$.
- b) $\frac{\sqrt{2}}{8}$.
- c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
- d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$.
- e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Resolução

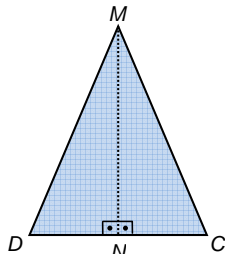
Alternativa B

Pelo enunciado, podemos construir o seguinte tetraedro:



O segmento \overline{MN} é perpendicular ao segmento \overline{CD} . De fato, considere o triângulo MCD . Como o segmento \overline{DM} é altura do triângulo equilátero ABD e o segmento \overline{CM} é altura do triângulo equilátero ABC , esses segmentos terão a mesma medida, uma vez que os triângulos ABC e ABD são congruentes com lados de comprimento 1 cm. Assim:

$$DM = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow DM = CM = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$



Desse modo, o triângulo MCD é isósceles, com base CD . Assim, o segmento \overline{MN} é tanto uma altura quanto uma mediana do triângulo MDC , sendo, portanto, perpendicular ao segmento \overline{CD} . Além disso, como o triângulo MND é retângulo, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$MD^2 = DN^2 + MN^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + MN^2 \Leftrightarrow MN^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow MN = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

Assim, a área do triângulo retângulo MND é dada por:

$$S_{MND} = \frac{MN \times DN}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow S_{MND} = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ cm}^2$$

QUESTÃO 21

Sejam A , B e C conjuntos tais que $C \subset B$, $n(B \setminus C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$, $n(A \cup B) = 22$ e $(n(C), n(A), n(B))$ é uma progressão geométrica de razão $r > 0$.

- Determine $n(C)$.
- Determine $n(\mathcal{P}(B \setminus C))$.

Resolução

a) Como $C \subset B$, temos que $B \cap C = C \Rightarrow n(B \cap C) = n(C)$.

Além disso, temos que $n(B \setminus C) = 3 \cdot n(B \cap C) = 3 \cdot n(C)$

Assim, sabendo que $n(B \setminus C) = n(B) - n(C)$, já que $C \subset B$ temos:

$$n(B) - n(C) = 3 \cdot n(C) \Leftrightarrow n(B) = 4n(C)$$

Também, como $(n(C), n(A), n(B))$ estão em PG, podemos dizer que:

$$[n(A)]^2 = n(C) \cdot n(B) = 4 \cdot [n(C)]^2 \Leftrightarrow n(A) = 2 \cdot n(C)$$

(pois $n(A)$ e $n(C)$ são ambos positivos)

Também temos:

$$3n(B \cap C) = 6n(A \cap B) \Leftrightarrow n(C) = 2n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = \frac{n(C)}{2}$$

E, como $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 22$, chegamos em:

$$2n(C) + 4n(C) - \frac{n(C)}{2} = 22 \Leftrightarrow \boxed{n(C) = 4}$$

b) Do item anterior, $n(B \setminus C) = 3n(C) = 12$.

Assim, temos que $n(\mathcal{P}(B \setminus C)) = 2^{n(B \setminus C)} = 2^{12} \Leftrightarrow \boxed{n(\mathcal{P}(B \setminus C)) = 4096}$

QUESTÃO 22

A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, a_6, \dots, a_{5n+1}, \dots)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_5, a_{10}, \dots, a_{5n}, \dots)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Resolução

Sendo $\frac{a_6}{a_1} = \frac{a_{10}}{a_5} = r^5$, observe que as progressões geométricas

$(a_1, a_6, \dots, a_{5n+1}, \dots)$ e $(a_5, a_{10}, \dots, a_{5n}, \dots)$ têm ambas razão $q = r^5$.

Por outro lado, o limite da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão q , quando n tende para infinito, para $-1 < q < 1$, é dado por:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Assim, para a PG $(a_1, a_6, \dots, a_{5n+1}, \dots)$, fazemos:

$$S_1 = \frac{a_1}{1-q} \Leftrightarrow 8 = \frac{a_1}{1-r^5} \Leftrightarrow a_1 = 8 \cdot (1-r^5)$$

Já para a PG $(a_5, a_{10}, \dots, a_{5n}, \dots)$, fazemos:

$$S_2 = \frac{a_5}{1-q} \Leftrightarrow 2 = \frac{a_5}{1-r^5} \Leftrightarrow a_5 = 2 \cdot (1-r^5)$$

Sendo $a_5 = a_1 \cdot r^4$, temos:

$$2 \cdot (1-r^5) = 8 \cdot (1-r^5) \cdot r^4 \Leftrightarrow r^4 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow r = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ pois } r < 0$$

Portanto:

$$a_1 = 8 \cdot (1-r^5) = 8 \cdot \left(1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right) = 8 + \sqrt{2}$$

Assim, para a PG $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{8 + \sqrt{2}}{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2 \cdot (8 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} \cdot \left[\frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}\right] \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 14 - 6\sqrt{2}}$$

QUESTÃO 23

Analise se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$ é bijetora e, em caso afirmativo, determine a função inversa f^{-1} .

Resolução

Uma função $f(x)$ é bijetora se, e somente se, é sobrejetora e injetora simultaneamente. Assim, vamos verificar essas propriedades para

$$f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$$

Inicialmente, vamos verificar se a função f é injetora. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b)$. Devemos mostrar que $a = b$.

Para tanto:

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow \frac{3^a - 3^{-a}}{2} = \frac{3^b - 3^{-b}}{2} \Leftrightarrow 3^a - \frac{1}{3^a} = 3^b - \frac{1}{3^b}$$

Fazendo $3^a = \alpha$ e $3^b = \beta$, temos:

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} = \beta - \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \alpha - \beta = -\frac{\alpha - \beta}{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ou } \alpha \cdot \beta = -1$$

Caso $\alpha \cdot \beta = -1$, teríamos $3^a \cdot 3^b = -1 \Leftrightarrow 3^{a+b} = -1$, o que é impossível, uma vez que a função exponencial $y = 3^x$ sempre é positiva. Assim, resta apenas o caso $\alpha = \beta \Leftrightarrow 3^a = 3^b \Leftrightarrow a = b$, que é o que queríamos demonstrar. Assim, f é injetora.

Vamos verificar se a função f é sobrejetora. Seja $y \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que existe pelo menos um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Para tanto, fazendo $3^x = z$:

$$y = f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(z - \frac{1}{z} \right) \Leftrightarrow 2y = \frac{z^2 - 1}{z} \Leftrightarrow z^2 - 2 \cdot y \cdot z - 1 = 0$$

Tratando a variável y como um número conhecido, temos que o discriminante dessa equação é $\Delta = (-2y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 \cdot (y^2 + 1)$. Assim

$$z = \frac{2y \pm \sqrt{4 \cdot (y^2 + 1)}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow z = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow 3^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Como $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$, para $\forall y \in \mathbb{R}$, descartamos essa possibilidade, já que $3^x > 0$, para $\forall x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, como $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$, para $\forall y \in \mathbb{R}$, fazemos:

$$3^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = \log_3(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Ou seja, para cada $y \in \mathbb{R}$, existe pelo menos um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, o que mostra que a função f é **sobrejetora**.

Sendo injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, **f é bijetora**, admitindo assim uma inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Observe que pelo desenvolvimento acima, utilizado para mostrar que f é sobrejetora, temos que:

$$y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2} \Leftrightarrow x = \log_3(y + \sqrt{y^2 + 1}) \Leftrightarrow \boxed{f^{-1}(y) = \log_3(y + \sqrt{y^2 + 1})}$$

QUESTÃO 24

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também é ímpar.

Resolução

Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijetora, ela admite uma inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{-1} \circ f(x) = x$, para $\forall x \in \mathbb{R}$.

Além disso, sendo f também ímpar, temos ainda, para $\forall x \in \mathbb{R}$, que $f(-x) = -f(x)$.

Queremos mostrar que, para $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

Para tanto, lembramos que se f é bijetora, para cada $y \in \mathbb{R}$, existe um e somente um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, ou ainda, $x = f^{-1}(y)$. Assim:

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$$

Ou seja, $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também é ímpar.

QUESTÃO 25

Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^6 a_n x^n$, com coeficientes reais sendo

$a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se r é raiz de p , $-r$ também é raiz de p . Analise a veracidade ou falsidade das afirmações.

I. Se r_1 e r_2 , $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p , então r_3 é imaginário puro.

II. Se r é raiz dupla de p , então r é real ou imaginário puro.

III. $a_0 < 0$.

Resolução

Por hipótese, o conjunto solução da equação $p(x) = 0$ é:

$$S = \{r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3\}.$$

Analisando cada afirmação, temos:

I. VERDADEIRA: Se r_1 e r_2 são raízes reais, então $-r_1$ e $-r_2$ também são raízes reais e a soma dessas quatro raízes é nula. Como r_3 é uma raiz não real de p , $r_3 = a + bi$, com $b \neq 0$. Pelo teorema das raízes complexas, como os coeficientes são reais, $\bar{r}_3 = a - bi$ também é raiz. Como, por hipótese, $-r_3 = -a - bi$ é a sexta raiz, temos que:

$$-r_3 = \bar{r}_3 \Leftrightarrow -a - bi = a - bi \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Portanto, r_3 é da forma $b \cdot i$, que é um imaginário puro.

II. FALSA: Como um contra-exemplo, observe que poderíamos ter o conjunto solução $\{2 + i, 2 + i, 2 - i, 2 - i, -2 + i, -2 - i\}$, formado por números complexos que não são nem reais nem imaginários puros. Note que as condições r e $-r$ como raízes continuam válidas, além da validade do teorema das raízes complexas. Observe que o exercício não afirma que r e $-r$ devem ter a mesma multiplicidade.

III) FALSA: Seja S o conjunto solução de p : $\{r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3\}$.

Por Girard, $(r_1)(-r_1)(r_2)(-r_2)(r_3)(-r_3) = a_0 \Leftrightarrow a_0 = -(r_1 r_2 r_3)^2$.

Como as raízes são complexas, tome por exemplo, $r_1 = i$, $r_2 = -i$ e $r_3 = 1$, e assim, temos: $a_0 = -(i \cdot (-i) \cdot 1)^2 = -(-1 \cdot 1)^2 = -1$, que é positivo.

QUESTÃO 26

Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

a) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou 6.

b) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser múltiplo de 6.

Resolução

a) Sendo n o número de bolas com número múltiplo de 5 ou 6 e P a probabilidade desejada, temos que $P = \frac{n}{90}$. Sendo n_5 o número de

múltiplos de 5 entre 1 e 90, n_6 o número de múltiplos de 6 entre 1 e 90 e n_{30} o número de múltiplos de 30 entre 1 e 90, podemos dizer que

$$n = n_5 + n_6 - n_{30}$$

Para calcularmos n_5 , basta vermos que ele é igual ao número de termos da PA (5, 10, 15, ..., 90). Como $a_1 = 5$, $a_n = 90$ e $r = 5$, temos que

$$a_n = a_1 + (n_5 - 1) \cdot r \Leftrightarrow 90 = 5 + (n_5 - 1) \cdot 5 \Leftrightarrow n_5 = 18.$$

De maneira análoga podemos ver que n_6 é igual ao número de termos da PA (6, 12, 18, ..., 90). Nesse caso, $a_1 = 6$, $a_n = 90$ e $r = 6$ e, portanto,

$$a_n = a_1 + (n_6 - 1) \cdot r \Leftrightarrow 90 = 6 + (n_6 - 1) \cdot 6 \Leftrightarrow n_6 = 15.$$

O valor de n_{30} é igual ao número de termos da PA (30, 60, 90) que é 3. Portanto, a probabilidade pedida é

$$P = \frac{n}{90} = \frac{n_5 + n_6 - n_{30}}{90} = \frac{18 + 15 - 3}{90} = \frac{30}{90} \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{3}}$$

b) Sendo P_1 a probabilidade de se retirar uma bola com número múltiplo de 6 e, sem repô-la, depois retirar-se uma bola de número não múltiplo de 6 e P_2 a probabilidade de se retirar uma bola com número não múltiplo de 6 e, sem repô-la, depois retirar-se uma bola de número não múltiplo de 6 novamente, temos que a probabilidade, P , pedida é igual à soma de P_1 com P_2 . Sendo assim,

$$P = P_1 + P_2 = \frac{15}{90} \cdot \frac{75}{89} + \frac{75}{90} \cdot \frac{74}{89} = \frac{75 \cdot (15 + 74)}{90 \cdot 89} = \frac{75}{90} \Rightarrow \boxed{P = \frac{5}{6}}$$

QUESTÃO 27

Considere as matrizes A e $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ e $X, B \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre todos os valores de a e b tais que a equação matricial $AX = B$ tenha solução única.

b) Se $a^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = [1 \ 1 \ 2 \ 4]^t$, encontre X tal que $AX = B$.

Resolução

Para que $AX = B$ tenha solução única, $\det A \neq 0$

Por Laplace na linha 3, temos:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ -a & b & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (a^2 + b^2 + a^2 - b^2) = -4a^2$$

Assim, $AX = B$ tem solução única se e somente se:

$$-4a^2 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{a \neq 0}$$

b) O sistema em questão é:

$$\begin{cases} ax + y + bz + w = 1 \\ bx + y + az = 1 \\ 2y = 2 \\ -ax + 2y + bz + w = 4 \end{cases}$$

Se $a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a = \pm b$, e lembrando que $a \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$.

Caso 1: $a = b$

$$\begin{cases} ax + y + az + w = 1 \\ ax + y + az = 1 \\ 2y = 2 \\ -ax + 2y + az + w = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow \begin{cases} ax + az + w = 0 \\ ax + az = 0 \Rightarrow \boxed{w=0} \\ -ax + az + w = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + az = 0 \\ -ax + az = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{a} \\ x = -\frac{1}{a} \end{cases}$$

Caso 2: $a = -b$

$$\begin{cases} ax + y - az + w = 1 \\ -ax + y + az = 1 \\ 2y = 2 \\ -ax + 2y - az + w = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow \begin{cases} ax - az + w = 0 \\ -ax + az = 0 \Rightarrow \boxed{w=0} \\ -ax - az + w = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax - az = 0 \\ -ax - az = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{a} \\ x = -\frac{1}{a} \end{cases}$$

Assim, temos:

Caso $a = b$, $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}^t$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Caso $a = -b$, $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 & -\frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}^t$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

QUESTÃO 28

Considere a equação $(3 - 2\cos^2 x) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) - 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$.

- Determine todas as soluções x no intervalo $[0, \pi]$.
- Para as soluções encontradas em a), determine $\operatorname{cotg} x$.

Resolução

a) Partindo da igualdade do enunciado, sendo $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(3 - 2\cos^2 x) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) - 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow (3 - 2\cos^2 x) = 3 \cdot \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Mas, temos que $\operatorname{sen} x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ (*)

Logo:

$$(3 - 2\cos^2 x) = 3 \operatorname{sen} x \Leftrightarrow 1 - 2\cos^2 x = 3 \operatorname{sen} x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

Resolvendo a equação, no intervalo $[0, \pi]$:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Assim, o conjunto verdade da equação é:

$$V = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

b) Calculando a cotangente para cada uma das soluções obtidas no item (a), chega-se a:

$$\operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0; \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}; \operatorname{cotg} \left(\frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3}$$

Observação (demonstração da identidade (*)):

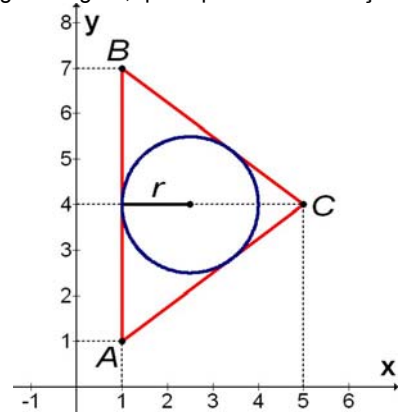
$$(*) \operatorname{sen} x = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

QUESTÃO 29

Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são $A = (1, 1)$, $B = (1, 7)$ e $C = (5, 4)$ no plano xOy .

Resolução

Considere a seguinte figura, que representa a situação:



Podemos ver facilmente que o triângulo ABC é isósceles de base \overline{AB} , já que a altura relativa a esse segmento passa pelo ponto médio dele.

Além disso, temos que $AC = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5 = BC$ e que $AB = 7 - 1 = 6$.

Para calcularmos o raio da circunferência inscrita a esse triângulo, lembremos que a área de um triângulo pode ser dada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo a , b e c os lados do triângulo e p o seu semi-perímetro, e também por $A = p \cdot r$, sendo r o raio da circunferência inscrita.

Sendo assim, observando que no triângulo ABC temos $p = \frac{5+5+6}{2} = 8$, podemos fazer:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p \cdot r$$

$$\sqrt{8 \cdot (8-5)(8-5)(8-6)} = 8 \cdot r \Leftrightarrow 12 = 8r \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$$

Pela simetria do triângulo isósceles, podemos ver que o centro da circunferência se encontra sobre a reta suporte da altura relativa a \overline{AB} , ou seja, $y = 4$. Além disso, podemos ver que a distância entre o segmento \overline{AB} e o centro da circunferência é igual a r , ou seja, a abscissa do centro vale $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Logo, sobre a circunferência inscrita, podemos afirmar que o seu centro é o ponto $\left(\frac{5}{2}, 4 \right)$ e seu raio mede $\frac{3}{2}$ e sua equação é:

$$\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^2$$

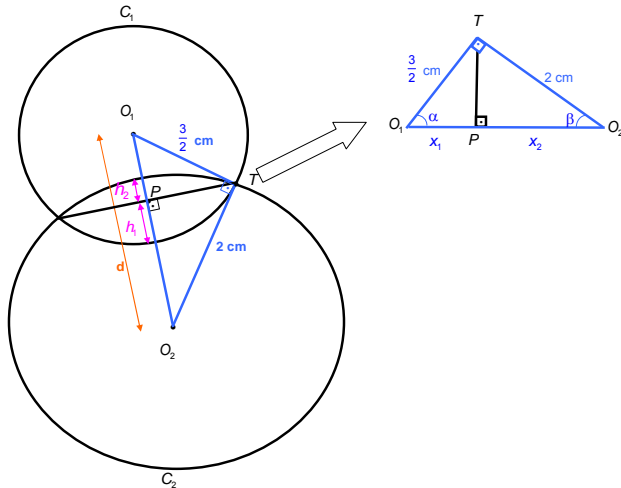
QUESTÃO 30

As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e $\frac{3}{2}$ cm, respectivamente, calcule

- a distância entre os centros das duas esferas.
- a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

Resolução

Podemos visualizar o seguinte esquema:



a) Para o cálculo de d temos: $d^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow d = \frac{5}{2}$

b) A área desejada é a soma de duas calotas esféricas cujas alturas estão indicadas por h_1 e h_2 .

Do triângulo acima, temos que: $(x_1 + x_2) = d$.

Utilizando as relações de triângulo retângulo, temos:

$$x_1 = \frac{r_1^2}{d} \Rightarrow x_1 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{5}{2}} \Rightarrow x_1 = \frac{9}{10} \text{ e } x_2 = \frac{r_2^2}{d} \Rightarrow x_2 = \frac{2^2}{\frac{5}{2}} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{5}$$

Assim:

$$h_1 = r_1 - x_1 \Rightarrow h_1 = \frac{3}{2} - \frac{9}{10} \Rightarrow h_1 = \frac{3}{5}; \quad h_2 = r_2 - x_2 \Rightarrow h_2 = 2 - \frac{8}{5} \Rightarrow h_2 = \frac{2}{5}$$

Uma vez que a área da superfície de uma calota é dada por $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$. Onde r é o raio da esfera e h a altura da calota, a

área desejada é: $A = 2\pi r_1 h_1 + 2\pi r_2 h_2 = A = 2 \cdot \pi \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5}\right) = \frac{17\pi}{5}$

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

\mathbb{R} : conjunto dos números reais

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

$A \setminus B = \{x, x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$\sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k, \quad k \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=0}^k a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k, \quad k \in \mathbb{N}$

\mathbb{C} : conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$|z|$: modulo do número $z \in \mathbb{C}$

\bar{z} : conjugado do número $z \in \mathbb{C}$

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$

$\det A$: determinante da matriz A

A^t : transposta da matriz A

A^{-1} : inversa da matriz inversível A

$\mathcal{P}(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A

$\text{Arg } z$: argumento principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\text{Arg } z \in [0, 2\pi[$

$f \circ g$: função composta das funções f e g

$f \cdot g$: produto das funções f e g

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.



Turmas super-reduzidas: só no ELITE.

Acompanhamento individualizado e projeto personalizado para a aprovação de cada aluno: só no ELITE.

Aprovação no ITA e no IME na região de Campinas: só no ELITE.

Quer entrar no ITA?

Faça ELITE.